

LAHENDUSED 10.KLASS

1. Vastus: 40%.

Lahendus:

Olgu kauba hind x eurot. Püsiklient ostab kaupa $x - 0,15x = 0,85x$ euro eest.

Kuna sel juhul teenib pood kasumit 19%, siis kauba soetamisega seotud kulud on $\frac{85}{119}x$.

Kuna tavaline ostja ostab kaupa x euro eest, siis

$x: \frac{85x}{119} = 140$, ehk pood teenib 40% kasumit.

Hindamine

Avaldatud kauba hind tava- ja püsikliendi jaoks	1p
Avaldatud kauba soetamisega seotud kulud	3p
Leitud poe kasum	3p
	7p

Märkus: Ainult õige vastuse eest anda 2p.

Kui vastus leitud mingite konkreetsete arvudega, siis anda maksimaalselt 4p

2. Vastus: $a = 3$.

Lahendus:

Olgu esimese võrrandi lahendid m ja n

Vastavalt Viète'i teoreemile:

$$mn = \frac{1}{2} \text{ ja } m + n = \frac{a}{2}.$$

Olgu teise võrrandi lahendid m ja p , ning

Vastavalt Viète'i teoreemile saame $mp = a$ ja $m + p = 4$,

kust $p = 4 - m$ ja $m(4 - m) = a$

Ning kuna $m + n = \frac{a}{2}$ saame võrrandi

$$m + n = \frac{m(4 - m)}{2}$$

$$m + n = \frac{4m - m^2}{2}$$

$$2m + 2n = 4m - m^2$$

$$m^2 - 2m + 2n = 0$$

Võrrandist $mn = \frac{1}{2}$ saame $n = \frac{1}{2m}$, ning $m^2 - 2m + \frac{1}{m} = 0$.

Kuna $mn = \frac{1}{2}$, siis $m \neq 0$

$$m^3 - 2m^2 + 1 = 0$$

$$m^3 - m^2 - m^2 + 1 = 0$$

$$m^2(m - 1) - (m^2 - 1) = 0$$

$$m^2(m - 1) - (m - 1)(m + 1) = 0$$

$$(m - 1)(m^2 - m - 1) = 0$$

Kust $m - 1 = 0$ või $m^2 - m - 1 = 0$ ning

$$m = 1 \text{ või } m = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ või } m = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$$m(4 - m) = a$$

Kui $m = 1$, siis $1(4 - 1) = a$, ehk $a = 3$

Kui $m = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, siis $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \left(4 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = a$, ehk $a = \frac{1+3\sqrt{5}}{2}$ ei ole täisarv

Kui $m = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, siis $\frac{1-\sqrt{5}}{2} \left(4 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = a$, ehk $a = \frac{1-3\sqrt{5}}{2}$ ei ole täisarv.

Järelikult, ainuke täisarvuline a väärtus on 3.

Hindamine

Viète'i teoreemi kasutamine esimeses võrrandis	1p
Viète'i teoreemi kasutamine teises võrrandis	1p
a avaldamine ühe muutuja kaudu	1p
Kuupvõrrandi koostamine	1p
Kuupvõrrandi lahendamine	2p
a väärtuste leidmine ja vastus	<u>1p</u>
	7p

Märkus: ainult õige vastuse eest anda 1p

3. Vastus: $\frac{R\sqrt{6}}{3}$

Lahendus:

Olgu kuubi servapikkus a . Selleks, et kuubid mahuksid kera sisse võimalikult hästi, tuleks need kuubid omavahel ühendada selliselt, et nad moodustaksid risttahuka mõõtmetega $2a \times a \times a$. Kui risttahukas asetada kera sisse, siis selle risttahuka diagonaal kattuks kera diameetriga. Leiame risttahuka diagonaali, kasutades selleks Pythagorase teoreemi:

$$d = \sqrt{(2a)^2 + a^2 + a^2} = a\sqrt{6}$$

Kuna risttahuka diagonaal on võrdne kera diameetriga ehk kera kahekordse raadiusega, saame avaldise:

$$2R = a\sqrt{6},$$

millest kuubi servapikkus

$$a = \sqrt{\frac{2}{3}}R = \frac{R\sqrt{6}}{3}$$

Hindamine:

Ettepanek asetada kuubid selliselt, et nad moodustaksid risttahuka	2p
Väide, et risttahuka diagonaal on võrdne kera läbimõõduga	1p
Risttahuka diagonaali avaldamine	1p
Avaldise $2R = a\sqrt{6}$ koostamine	1p
Õige lõppvastus	2p
	7p

Märkus: Ainult õige vastuse eest ilma toetava põhjenduseta anda 1p.

4. Vastus: 8 käiku.

Lahendus:

Arvu 2020 tegurid on: 1, 2, 4, 5, 10, 20, 101, 202, 404, 505, 1010, 2020.

Selleks, et leida vähim käikude arv, üritame iga käiguga eemaldada hunnikust nii palju käbisid kui vähegi võimalik:

$$2020 - 1010 = 1010$$

$$1010 - 505 = 505$$

$$505 - 404 = 101$$

$$101 - 20 = 81$$

$$81 - 20 = 61$$

$$61 - 20 = 41$$

$$41 - 20 = 21$$

$$21 - 20 = 1$$

Sellise strateegiaga kulub käbide eemaldamiseks 8 käiku.

Paneme tähele, et 101 on arvu 2020 suurim tegur ja pooled 2020 tegurid jaguvad 101-ga. Seetõttu tasub arvu 2019 lahti kirjutada järgnevalt:

$$2019 = 19 \cdot 101 + 100$$

Sellest tulenevalt saame panna tähele, et 1919 käbi eemaldamiseks peab kuluma vähemalt 3 käiku ning ülejäänud 100 käbi eemaldamiseks kulub vähemalt 5 käiku. Seetõttu pole võimalik, et käbide eemaldamiseks kulub vähem kui 8 käiku.

Hindamine:

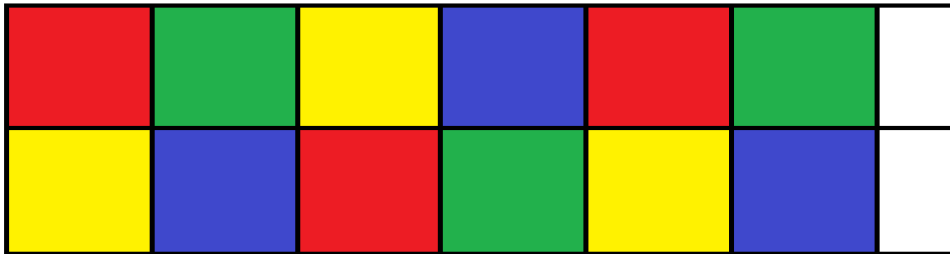
Arvu 2020 tegurite loetlemine	1p
Näitamine, et 8 käiguga saab teha	2p
Põhjendus, miks pole võimalik seda teha vähem kui 8 käiguga	4p
	7p

Märkus: Ainult õige vastuse eest anda 1p.

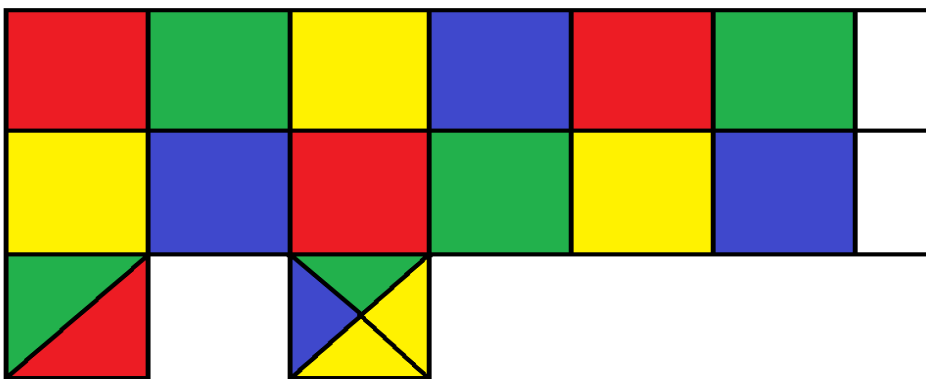
5. Vastus: 2

Lahendus:

Värvime väljaku nelja värviga nagu näidatud allpool:

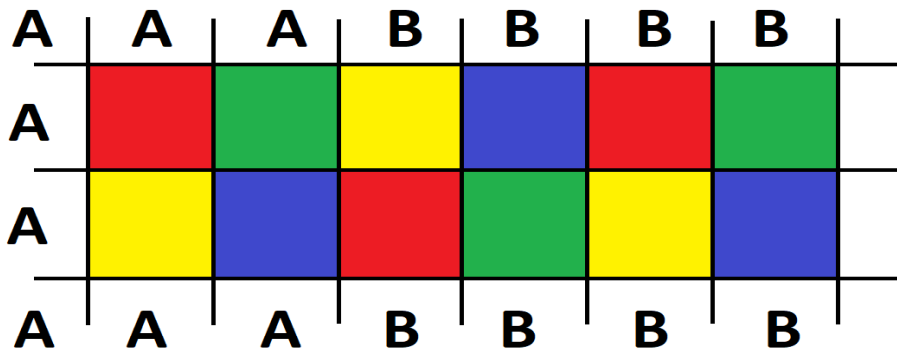


Ratsu saab jõuda ükskõik millisest ruudust ükskõik millisesse sama värvi ruutu. Ehk meil on neli hulka ruute, mille sees saab ratsu vabalt liikuda ning ühelt värvilt teisele liikuda ei saa.



Sellisel saab lisada kaks ruutu niimodi, et ratsu saaks ükskõik milliselt ruudult ükskõik millisele ruudule. Nende ruutude kaudu saab ratsu vahetada värvi, mille peal ta käib kuna ühel lisaruudul on kolm värvi, ja teisel lisaruudul on kaks värvi ning kõik mänguväljal kasutatud värvid on lisaruutudel esindatud.

Tõestame nüüd, et ühest lisaruudust ei piisa.



Lisaruutude kohad, mis on tähistatud A tähega ei sobi, kuna sealt saab ratsu teha käike

kolmele erinevale ruudule, ning neljandale värvile ratsu ikka ei satu.

Vaatleme nüüd B ruute - nendest saab ratsu käia 4 erinevale ruudule, kuid märkame, et kaks nendest on alati sama värviga, ehk ratsu saab käia 3 erinevale värvile ning tekitab sama probleem, mis ka A tähe ruutudega.

Hindamine:

Õige vastus ja selle näide 2p

Õige värvimine või kõigi ruutude jaotamine nelja gruppi sama printsiibi alusel 3p

Tõestamine, et 1 lisaruuduga hakkama ei saa 2p

7p

Märkus: Ainult õige vastus - 0p.

